УДК 519.24

ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ МОМЕНТОВ ОДНОЙ ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ

В.Е. Конобас, *4 курс*
Научный руководитель – ***Е.И. Мирская****, к. физ.-мат. н., доцент*
Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина

Пусть $X^r(t), t \in Z - r$-мерный действительный стационарный в широком смысле случайный процесс, с $MX_a(t) = 0,$ взаимной ковариационной функцией $R_{ab}(\tau) = MX_a(t+\tau)X_b(t), t, \tau \in Z$, неизвестной взаимной спектральной плотностью $f_{ab}(\lambda), \lambda \in \Pi$, $\Pi = [-\pi;\pi], a, b = \overline{1,r}$.

Пусть $X_a(0), X_a(1), \ldots, X_a(T-1) - T$ последовательных, полученных через равные промежутки времени наблюдений за составляющей $X_a(t), a = \overline{1,r}$, процесса $X^r(t), t \in Z$. В качестве оценки неизвестной взаимной спектральной плотности рассмотрим расширенную периодограмму

$$I_{ab}^T(\lambda) = d_a^T(\lambda)\overline{d_b^T(\lambda)}, \qquad \text{….. (1)}$$

где $d_a^T(\lambda)$ задается соотношением

$$d_a^T(\lambda) = \left[2\pi\sum_{t=0}^{T-1} h_T^2(t)\right]^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=0}^{T-1} X_a(t) h_T(t) e^{-it\lambda}. \qquad (2)$$

Исследованы моменты статистики $I_{ab}^T(\lambda), a, b = \overline{1,r}, \lambda \in \Pi$.

Теорема 1. Для любых точек $\lambda_1, \lambda_2 \in \Pi$ ковариация расширенной периодограммы (1) имеет вид:

$$\operatorname{cov}\left(I_{a_1b_1}^T(\lambda_1), I_{a_2b_2}^T(\lambda_2)\right) = 2\pi\left[\sum_{t=0}^{T-1} h_T^2(t)\right]^{-2} \sum_{t=0}^{T-1} h_T^4(t) \times \iiint_{\Pi^3} f_{a_1b_1a_2b_2}(\mu_1+\lambda_1, \mu_2-\lambda_1, \mu_3-\lambda_2) \times$$

$$\times \Phi_T(\mu_1,\mu_2,\mu_3)\, d\mu_1 d\mu_2 d\mu_3 + \int_\Pi f_{a_1a_2}(\nu)\Phi_T(\nu-\lambda_1, \nu-\lambda_2)\, d\nu \int_\Pi f_{b_1b_2}(\mu)\Phi_T(\mu+\lambda_1, \mu+\lambda_2)\, d\mu +$$

$$+ \int_\Pi f_{a_1b_2}(\nu)\Phi_T(\nu-\lambda_1, \nu+\lambda_2)\, d\nu \int_\Pi f_{b_1a_2}(\mu)\Phi_T(\mu+\lambda_1, \mu-\lambda_2)\, d\mu,$$

где

$$\Phi_T(\mu_1,\mu_2,\mu_3) = \left[(2\pi)^3\sum_{t=0}^{T-1} h_T^4(t)\right]^{-1} \varphi_T(\mu_1)\varphi_T(\mu_2)\varphi_T(\mu_3)\overline{\varphi_T(\mu_1+\mu_2+\mu_3)}, \qquad (3)$$

$$\Phi_T(x,y) = \left[2\pi\sum_{t=0}^{T-1} h_T^2(t)\right]^{-1} \varphi_T(x)\overline{\varphi_T(y)}, \qquad (4)$$

а $\varphi_T(x)$ задается соотношением

$$\varphi_T(x) = \sum_{t=0}^{T-1} h_T(t) e^{ixt}, \qquad (5)$$

$a_1, b_1, a_2, b_2, = \overline{1,r}$, $f_{a_1b_1a_2b_2}(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ - семиинвариантная спектральная плотность четвертого порядка.

Доказательство. По определению ковариации

$$\operatorname{cov}\left(I^T_{a_1b_1}(\lambda_1), I^T_{a_2b_2}(\lambda_2)\right) = MI^T_{a_1b_1}(\lambda_1)\overline{I^T_{a_2b_2}(\lambda_2)} - MI^T_{a_1b_1}(\lambda_1) M\overline{I^T_{a_2b_2}(\lambda_2)} = \left[2\pi\sum_{t=0}^{T-1} h_T^2(t)\right]^{-2} \times$$

$$\times \sum_{t_1,t_2,t_3,t_4=0}^{T-1} h_T(t_1)h_T(t_2)h_T(t_3)h_T(t_4) e^{-i((t_1-t_2)\lambda_1+(t_4-t_3)\lambda_2)}\left(M\{X_{a_1}(t_1)X_{b_1}(t_2)X_{a_2}(t_3)X_{b_2}(t_4)\}\right.$$

$$\left.- M\{X_{a_1}(t_1)X_{b_1}(t_2)\}M\{X_{a_2}(t_3)X_{b_2}(t_4)\}\right)$$

Учитывая определение смешанного момента n-го порядка, запишем

$$\operatorname{cov}\left(I^T_{a_1b_1}(\lambda_1), I^T_{a_2b_2}(\lambda_2)\right) = \left[2\pi\sum_{t=0}^{T-1} h_T^2(t)\right]^{-2} \sum_{t_1,t_2,t_3,t_4=0}^{T-1} h_T(t_1)h_T(t_2)h_T(t_3)h_T(t_4) e^{-i((t_1-t_2)\lambda_1+(t_4-t_3)\lambda_2)} \times$$

$$\times \left[m_{a_1b_1a_2b_2}(t_1,t_2,t_3,t_4) - m_{a_1b_1}(t_1,t_2)m_{a_2b_2}(t_3,t_4)\right]$$

Учитывая соотношения, связывающие смешанные семиинварианты и смешанные моменты, можем записать

$$\operatorname{cov}\left(I^T_{a_1b_1}(\lambda_1), I^T_{a_2b_{21}}(\lambda_2)\right) = \left[2\pi\sum_{t=0}^{T-1} h_T^2(t)\right]^{-2} \sum_{t_1,t_2,t_3,t_4=0}^{T-1} h_T(t_1)h_T(t_2)h_T(t_3)h_T(t_4) e^{-i((t_1-t_2)\lambda_1+(t_4-t_3)\lambda_2)} \times$$

$$\times \left[C_{a_1b_1a_2b_2}(t_1,t_2,t_3,t_4) + R_{a_1a_2}(t_1,t_3)R_{b_1b_2}(t_2,t_4) + R_{a_1b_2}(t_1,t_4)R_{b_1a_2}(t_2,t_3)\right] = \left[2\pi\sum_{t=0}^{T-1} h_T^2(t)\right]^{-2} \sum_{t_1,t_2,t_3,t_4=0}^{T-1} h_T(t_1)\times$$

$$\times h_T(t_2)h_T(t_3)h_T(t_4) e^{-i((t_1-t_2)\lambda_1+(t_4-t_3)\lambda_2)}\left(C_{a_1b_1a_2b_2}(t_1-t_4, t_2-t_4, t_3-t_4) + R_{a_1a_2}(t_1-t_3)R_{b_1b_2}(t_2-t_4) +\right.$$

$$\left.+ R_{a_1b_2}(t_1-t_4)R_{b_1a_2}(t_2-t_3)\right).$$

Обозначим слагаемые в последнем выражении соответственно A_1, A_2, A_3. Тогда, используя представление

$$C_{a_1\ldots a_n}(\tau_1,\ldots,\tau_{n-1}) = \int_{\Pi^{n-1}}\cdots\int f_{a_1\ldots a_n}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) e^{i\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_j\tau_j} d\lambda_1\ldots d\lambda_{n-1},$$

$\tau_j \in Z,\ j = \overline{1,n-1},\ a_j = \overline{1,r},\ j = \overline{1,n}$ для смешанных семиинвариантов четвертого порядка, имеем

$$A_1 = \left[2\pi\sum_{t=0}^{T-1} h_T^2(t)\right]^{-2} \sum_{t_1,t_2,t_3,t_4=0}^{T-1} \iiint_{\Pi^3} f_{a_1a_2b_1b_2}(\beta_1,\beta_2,\beta_3) e^{i\sum_{j=1}^{3}\beta_j(t_j-t_4)} h_T(t_1)h_T(t_2)h_T(t_3)h_T(t_4)\times$$

$$\times e^{-i((t_1-t_2)\lambda_1+(t_4-t_3)\lambda_2)} d\beta_1 d\beta_2 d\beta_3.$$

Меняя порядок суммирования и интегрирования, и используя (5), получим

$$A_1 = \left[2\pi\sum_{t=0}^{T-1} h_T^2(t)\right]^{-2} \iiint_{\Pi^3} f_{a_1a_2b_1b_2}(\beta_1,\beta_2,\beta_3) \sum_{t_1=0}^{T-1} e^{i(\beta_1-\lambda_1)t_1} h_T(t_1) \sum_{t_2=0}^{T-1} e^{i(\beta_2+\lambda_1)t_2} h_T(t_2) \sum_{t_3=0}^{T-1} e^{i(\beta_3+\lambda_2)t_3} h_T(t_3)\times$$
$$\times\sum_{t_4=0}^{T-1} e^{-i(\beta_1+\beta_2+\beta_3+\lambda_2)t_4} h_T(t_4)d\beta_1 d\beta_2 d\beta_3 = \iiint_{\Pi^3} f_{a_1a_2b_1b_2}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\varphi_T(\beta_1-\lambda_1)\varphi_T(\beta_2+\lambda_1)\varphi_T(\beta_3+\lambda_2)\times$$
$$\times\overline{\varphi_T(\beta_1+\beta_2+\beta_3+\lambda_2)}d\beta_1 d\beta_2 d\beta_3.$$

Сделаем замены переменных интегрирования: $\mu_1=\beta_1-\lambda_1, \mu_2=\beta_2+\lambda_1, \mu_3=\beta_3+\lambda_2$ тогда

$$A_1 = \left[2\pi\sum_{t=0}^{T-1} h_T^2(t)\right]^{-2} \iiint_{\Pi^3} f_{a_1a_2b_1b_2}(\mu_1+\lambda_1,\mu_2-\lambda_1,\mu_3-\lambda_2)\varphi_T(\mu_1)\varphi_T(\mu_2)\varphi_T(\mu_3)\times$$
$$\times\overline{\varphi_T(\mu_1+\mu_2+\mu_3)}d\mu_1 d\mu_2 d\mu_3.$$

Используя формулу (3), получим

$$A_1 = \frac{(2\pi)^3\sum_{t=0}^{T-1} h_T^4(t)}{(2\pi)^2(\sum_{t=0}^{T-1} h_T^2(t))^2} \iiint_{\Pi^3} f_{a_1a_2b_1b_2}(\mu_1+\lambda_1,\mu_2-\lambda_1,\mu_3-\lambda_2)\Phi_T(\mu_1,\mu_2,\mu_3)d\mu_1 d\mu_2 d\mu_3 =$$

$$= 2\pi\left[\sum_{t=0}^{T-1} h_T^2(t)\right]^{-2}\sum_{t=0}^{T-1} h_T^4(t)\iiint_{\Pi^3} f_{a_1a_2b_1b_2}(\mu_1+\lambda_1,\mu_2-\lambda_1,\mu_3-\lambda_2)\Phi_T(\mu_1,\mu_2,\mu_3)d\mu_1 d\mu_2 d\mu_3.$$

Рассмотрим второе слагаемое

$$A_2 = \left[2\pi\sum_{t=0}^{T-1} h_T^2(t)\right]^{-2} \sum_{t_1,t_2,t_3,t_4=0}^{T-1} h_T(t_1)h_T(t_2)h_T(t_3)h_T(t_4)e^{-i((t_1-t_2)\lambda_1+(t_4-t_3)\lambda_2)}R_{a_1a_2}(t_1-t_3)R_{b_1b_2}(t_2-t_4).$$

Используя связь взаимной ковариационной функции и взаимной спектральной плотности, получим

$$A_2 = \left[2\pi\sum_{t=0}^{T-1} h_T^2(t)\right]^{-2} \sum_{t_1,t_2,t_3,t_4=0}^{T-1} h_T(t_1)h_T(t_2)h_T(t_3)h_T(t_4)e^{-i((t_1-t_2)\lambda_1-(t_3-t_4)\lambda_2)}\int_{\Pi} f_{a_1a_2}(\nu)e^{i\nu(t_1-t_3)}d\nu\times$$
$$\times\int_{\Pi} f_{b_1b_2}(\mu)e^{i\mu(t_2-t_4)}d\mu.$$

Меняя порядок суммирования и интегрирования, имеем

$$A_2 = \iint_{\Pi^2} f_{a_1a_2}(\nu)f_{b_1b_2}(\mu)\left[2\pi\sum_{t=0}^{T-1} h_T^2(t)\right]^{-2}\sum_{t_1=0}^{T-1} h_T(t_1)e^{i(\nu-\lambda_1)t_1}\sum_{t_2=0}^{T-1} h_T(t_2)e^{i(\mu+\lambda_1)t_2}\times$$
$$\times\sum_{t_3=0}^{T-1} h_T(t_3)e^{-i(\nu-\lambda_2)t_3}\sum_{t_4=0}^{T-1} h_T(t_4)e^{-i(\mu+\lambda_2)t_4}d\nu d\mu.$$

Из формул (4) и (5) следует

$$A_2 = \iint_{\Pi^2} f_{a_1a_2}(\nu)f_{b_1b_2}(\mu)\left[2\pi\sum_{t=0}^{T-1} h_T^2(t)\right]^{-2}\phi_T(\nu-\lambda_1)\overline{\phi_T(\nu+\lambda_2)}\phi_T(\mu+\lambda_1)\overline{\phi_T(\mu-\lambda_2)}d\nu d\mu =$$
$$= \int_{\Pi} f_{a_1a_2}(\nu)\Phi(\nu-\lambda_1,\nu-\lambda_2)d\nu\int_{\Pi} f_{b_1b_2}(\mu)\Phi(\mu+\lambda_1,\mu+\lambda_2)d\mu.$$

Аналогично доказывается A_3. Теорема доказана.

Теорема 2. Если семиинвариантная спектральная плотность четвертого порядка ограничена, функция $h_T(t)$ является ограниченной, имеет ограниченную вариацию и

$$\sum_{u=-\infty}^{\infty}|u||R_{ab}(u)|<\infty,$$

где $a, b = \overline{1, r}$, и

$$\iiint\limits_{\Pi^3} \left|\Phi_T(\mu_1, \mu_2, \mu_3)\right| d\mu_1 d\mu_2 \mu_3 \le D < \infty,$$

то для $\lambda_1 \pm \lambda_2 \ne 0 (\mathrm{mod}\, 2\pi)$ получим

$$\lim_{T\to\infty} \mathrm{cov}\left\{ I^T_{a_1 b_1}(\lambda_1), I^T_{a_2 b_2}(\lambda_2) \right\} = 0.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.9 работы [1, с.129].

Список использованных источников

1. Труш, Н.Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов / Н.Н. Труш. – Мн.: БГУ, 1999. – 218 с.